Tidevannskraften og tidevannet på jorden

av

Professor emeritus Bjørn Gjevik

Universitetet i Oslo

epost: bjorng@math.uio.no

Dato 10. januar 2021

1. Innledning

Tidevannets mangslunge aspekter har fascinert folk fra de tidligste tider og de regelmessige vekslingene mellom høy og lavvann vekker undring selv blant dagens moderne mennesker.

Siden tidevannet utgjør en viktig del av strømvariasjonene i havet særlig i kystnære farvann, har tidevannet stor betydning både for livet i havet og for maritim virsomheten. Dette gjør at virkningen av tidevannskraften på forholdene i havet fortsatt er et høyst aktuelt tema (Gjevik 2009).

I henvendelser som jeg har fått er det blitt antydet at de populærvitenskapelige forklaringene på tidevannskraften i Gjevik (2009, 2011a) er for enkle og ikke dekkende for de faktiske forhold. For å forklare samspillet av krefter mellom månen og jorden, når disse beveger seg i forhold til hverandre, må en gå langt mer grundigere tilverks har det blitt hevdet. Spesielt har noen argumentert for at sentrifugalkraften på grunn av jordens roterende bevegelse må trekkes inn i forklaringene.

Dette har inspirert meg til å se grundigere på disse problemene og det er bakgrunnen for dette notatet. Forhåpentligvis vil det virke oppklarende og til nytte for dem som er opptatt av tidevannet og ønsker en dypere forståelse av fenomenet.

2. Systemet jord-måne

Månen virkning utgjør det viktigste bidraget til tidevannskraften her på jorden og solen virkning er vesentlig mindre (ca. 40 % av totalen).

Vi skal derfor se på et idealisert system bestående bare av en homogen kuleformet jord med radius $r_j = 6\,370\ km$ og en homogen kuleformet måne med radius $r_m = 1\,738\ km$. Forholdet mellom massen til månen (m_m) og massen til jorden (m_j) er 1:81. Vi antar at månen går i en sirkulær bane omkring jorden og at den midlere avstanden mellom sentrum av jorden og sentrum i månen er R=384 000 km. Det felles tyngdepunktet for systemet ligger inne i jorden i en avstand $r_s = 4\,680\ km$ fra jordens sentrum, bestemt fra likningen

$$m_j r_s = m_m(R - r_s)$$

Resultanten av tiltrekningskraften (gravitasjonen) mellom massene i månen og jorden er gitt ved Newtons gravitasjonslov. Kraften som virker på jorden kan skrives

$$\vec{F} = G\frac{m_j m_m}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} \tag{1}$$

hvor G er gravitasjonskonstanten. Kraften virker i sentrum av jorden og er rettet langs linjen mellom sentrum i jorden og månen beskrevet ved en vektoren $\vec{R}$ med lengde $R = |\vec{R}|$. Kraften gir tyngdepunktet (sentrum) av jorden (S) en akselerasjon

$$\vec{a}_S = G\frac{m_m}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}$$

i samme retning (fig. 1).

En like stor og motsatt rettet kraft virker på månen. Siden summen av disse to kreftene er null vil akselerasjonen av tyngdepunktet for systemet måne-jord også være null. Vi har da sett helt bort fra gravitasjonskrefter fra andre himmellegemer som f.eks. solen. Det betyr at jorden og månen beveger seg rundt det felles tyngdepunktet, T, som kan oppfattes å være i ro eller i jevn rettlinjet bevegelse.

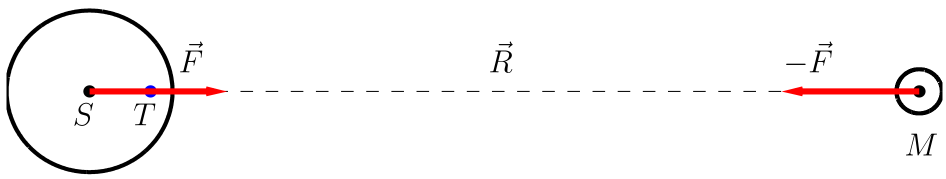

Figure 1: Skisse av systemet jord – måne i et plan gjennom sentrum av jorden, S, og sentrum av månen, M. Punktet T er det felles tyngdepunktet for systemet. Jorden og månen er avbildet i rette størrelsesforhold, men avstanden mellom dem er forminsket til 10 jordradier, I virkeligheten er avstanden ca. 60 jordradier. Resultanten av gravitasjonskreftene på jorden og månen er henholdsvis $\vec{F}$ og $-\vec{F}$.

For den videre framstillingen skal vi omskrive uttrykket for akselerasjonen i jordens sentrum. Ved å innføre tyngdens akselerasjon g ved jordens overflate gitt ved

$$g = G\frac{m_j}{r_j^2}$$

kan vi eliminere gravitasjonskonstanten G i uttrykket for $\vec{a}_S$ og skrive

$$\vec{a}_S = g\frac{m_m}{m_j}(\frac{r_j}{R})^2\frac{\vec{R}}{R}$$

Dette uttrykket for $\vec{a}_S$ skal vi bruke i nest avsnitt når vi beregner omløpstiden for månen.

3. Jordens bevegelse

Bevegelsen av jorden i forhold til det felles tyngdepunktet T er spesiell og det er viktig å analysere denne bevegelsen grundig før vi går videre.

Vi kan i denne omgang se bort fra jordens egenrotasjon om aksen gjennom nord og sørpolen med omløpstid 24 timer. Den virker ikke direkte inn på tidevannskraften fra månen i dette idealiserte tilfellet. Men jordens rotasjon har selvfølgelig en stor innvirkning på hvordan jordkloden deformeres og havmassene beveger under påvirkning av tidevannskraften. I det følgende skal vi anta at jorden er stiv og udeformerbar.

Figur 2 viser jorden i fire stillinger (1-4) i den sykliske bevegelsen i forhold til det felles tyngdepunktet for systemet jord-måne. Retningen til månen for de fire stillingene er angitt med piler nummerert henholdsvis 1-4. Første stilling (1) av jorden i syklusen er angitt med en heltegnet svart sirkel, sentrum er markert med et blått punkt S og et punkt A på jordens overflate er markert med rødt. I den videre bevegelsen vil punktene S og A bevege seg på sirkler med radius r_s, stiplet henholdsvis rød og blå på figuren. Når jorden er kommet i den neste stillingen (stiplet svart) og med retning til månen (2), har punktene S og A kommet til ny posisjon angitt henholdsvis med $S^{'}$ og $A^{'}$. I neste stilling, måneretning (3), har punktene S og A, posisjon $S^{''}$ og $A^{''}$ og i den siste stillingen, måneretning (4), har punktene S og A, posisjon $S^{'''}$ og $A^{'''}$.

Av dette ser vi at under jordens bevegelse om det felles tyngdepunkt, beholder det markerte linjestykke AS retningen i rommet. Jorden beveger seg omkring tyngdepunktet T i en *translatorisk bevegelse* uten at jorden roterer. Det har til følge at alle punkter på jorden har samme akselerasjon som sentrum av jorden ($\vec{a}_S$) og akselerasjonen er til en hver tid rettet mot månen. Det er lett å misforstå her og feilaktig tro at jordens bevegelse er en rotasjon som om det er en fast aksling gjennom tyngdepunktet. Det er altså ikke tilfelle. Nye punkter på jorden vil passere gjennom punktet T og det punktet som var i punktet T i den første stillingen vil ha flytte seg i den videre bevegelsen på en sirkel til punktene $T^{'}$, $T^{''}$ og $T^{'''}$. Men det er likevel slik at det punktet på jorden som til en hver tid er i T har avstanden r_s fra jordens sentrum.

Følgen av dette er at til enhver tid har alle punkter på jorden den *samme* akselerasjon $\vec{a}_S$ og akselerasjonen er overalt rettet mot månen. På figur 2 er akselerasjonen for punktene A og S tegnet som henholdsvis røde og blå piler (vektorer) for de fire stillinene av jorden.

Vi har nå vist at alle punkter på jorden går i en sirkelbane med radius r_s med akselerasjon $\vec{a}_S$ som har konstant størrelse

$$a_S = |\vec{a}_S| = g\frac{m_m}{m_j}\left(\frac{r_j}{R}\right)^2$$

Sentripetalakselerasjonen i sirkelbevegelse er

$$r_s\Omega^2 = r_s\frac{4\pi^2}{T_m^2} = a_S$$

hvor Ω er vinkelhastigheten og T_m er tiden for et omløp i banen. Dette gir

$$T_m = 2\pi\frac{R}{r_j}\sqrt{\frac{r_j}{g}\frac{m_j}{m_m}}$$

Med $g = 9.81\ ms^{-2}$ og tallverdier for de andre parametrene som inngår i dette uttrykket hentet fra avsnitt (1), finner vi at omløpstiden er T_m = 27,3 middel soldøgn. Dette tilsvarer lengden av den sideriske måneperioden og tallverdien som framkommer her er i meget god overensstemmelse med nøyaktige verdier.

En tilsvarende analyse av hvordan jorden beveger seg under påvirkning av gravitasjonskraften fra månen er vel kjent og finnes selvfølgelig beskrevet flere steder i den vitenskapelige litteraturen på feltet, se f. eks. Darvin (1962) og Frauenfelder und Huber (1951).

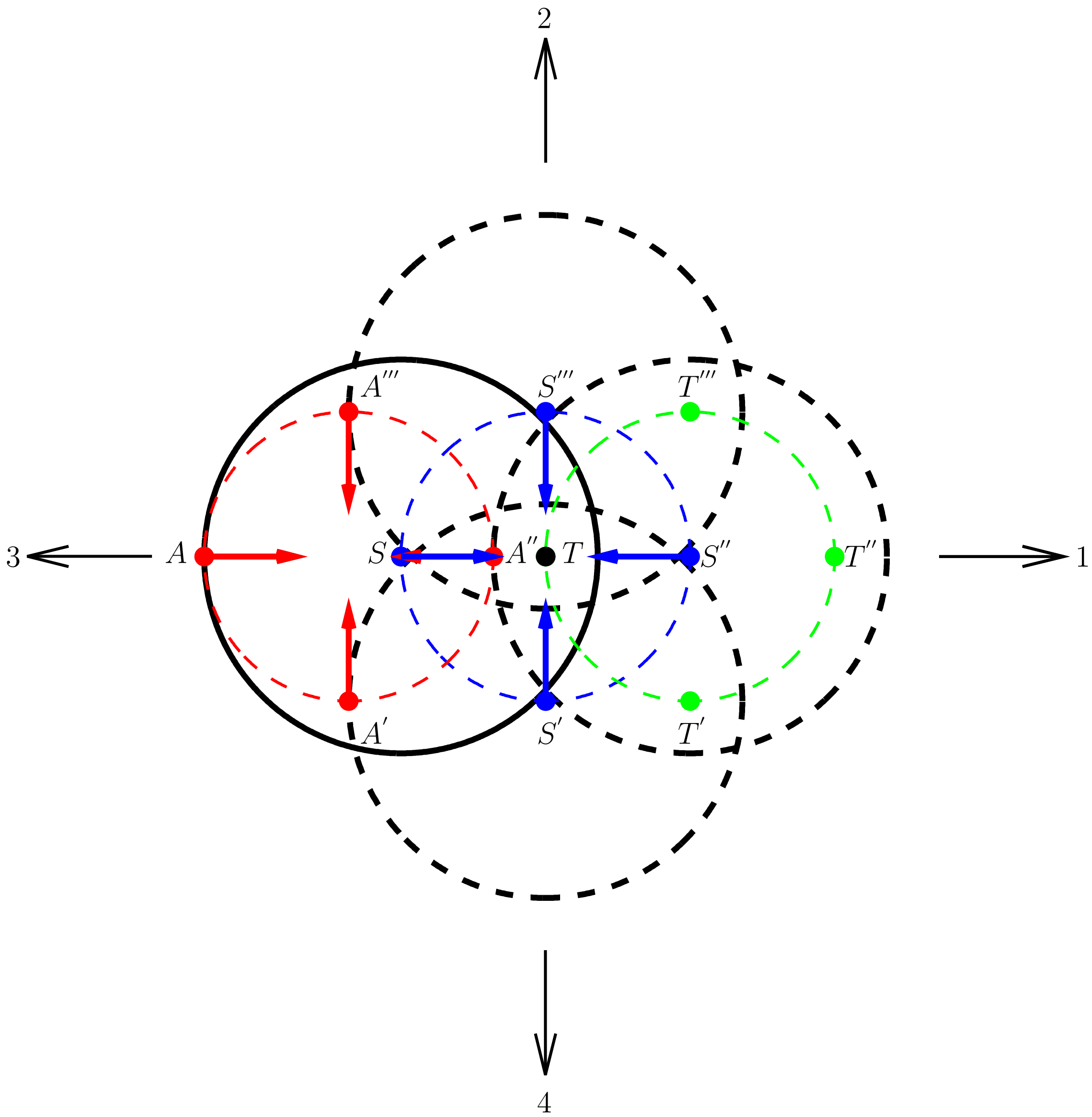

Figure 2: Skisse av jordens bevegelse i forhold til det felles tyngdepunktet T for systemet jord og måne. Jorden er tegnet fire stillinger med tilsvarende retninger 1-4 til månen. I utgangsstillingen (måneretning 1) er omrisset av jorden tegnet med heltrukket svart sirkellinje med sentrum S. De øvrige 3 stillingene (måneretninger 2-4) er tegnet med stiplet svart sirkellinje med sentrum henholdsvis i $S^{'}$, S'' og $S^{'''}$. Banen til sentrum i jorden (S) og et punkt A på jordoverflaten er markert henholdsvis med blå og rød stiplet sirkellinje. Akselerasjonen for punktene er tegnet som røde og blå piler (vektorer) for de fire stillingene av jorden. Se forøvrig forklaringene i teksten.
.

4. Månens bevegelse

Den sideriske måneperioden er som allerede nevnt $T_m = 27{,}3$ middel soldøgn. Det er:

$$T_m = 27,3 \times 24 \; timer$$

Når månen står i ekvatorplanet betyr det at skjæringspunktet for siktelinjen fra jordsentret til månen beveger seg vesttover (?) langs ekvator med en fart:

$$v_m = \frac{2\pi r_j}{T_m}$$

regnet i kilometer per time. Samtidig gir rotasjonen av jorden siktelinjen en fart østover (?):

$$v_j = \frac{2\pi r_j}{T_j}$$

hvor $T_j = 24 \; timer$. Skjæringspunktet mellom siktelinjen og ekvatorlinjen utfører derfor et omløp langs ekvator på

$$T_s = \frac{2\pi r_j}{v_j - v_m} = \frac{T_m T_j}{T_m - T_j}$$

Innsatt tallverdier gir dette $T_s = 24{,}913 \; timer$.

5. Tidevannskraften på jorden

Vi er nå klar for å beregne tidevannsakselerasjonen på jordoverflaten. En partikkel med masse m i et punkt P ved jordoverflaten vil være påvirket av tyngdekraften, oppdriftskraften i vann eller luft og en liten kraft som skyldes månens tiltrekningskraft. Antar vi for enkelhets skyld at partikkelen flyter nøytralt i luft eller vann vil oppdriftskraften og tyngdekraften balansere hverandre slik at vi ikke behøver å trekke inn disse kreftene i denne omgang. Tiltrekningskraften fra månen på massen m i punktet P kan skrives:

$$\vec{F}_m = G\frac{mm_m}{d^2}\frac{\vec{d}}{d}$$

hvor vektoren $\vec{d}$ angir retningen fra punktet P til sentrum av månen og lengden av vektoren $d = |\vec{d}|$ er avstanden (se fig. 3). Siden jorden er i akselerert bevegelse må vi også ta med treghetskraften (sentrifugalkraften) som er

$$\vec{F}_s = -m\vec{a}_S = -G\frac{mm_m}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}$$

Det er viktig å være klar over at treghetskraften er like stor på alle steder på jorden noe som følger av at jorden har en translatorisk bevegelse og at vi har antatt at jorden er stiv og udeformerbar. Summen av den lokale tiltrekningskraften fra månen ($\vec{F}_m$) og treghetskraften $\vec{F}_s$

$$\vec{F}_t = \vec{F}_m + \vec{F}_s$$

utgjør tidevannskraften på partikkelen P. På den siden av jorden som vender mot månen er $d \leq R$. Derfor er $|\vec{F}_m|$ større enn $|\vec{F}_s|$ og tidevannskraften vil være rettet mot månen. På den andre siden av jorden som vender bort fra månen er $d \geq R$. Derfor vil $|\vec{F}_m|$ være mindre enn $|\vec{F}_s|$ og tidevannskraften vil være rettet bort fra månen på denne siden av jorden (fig. 4).

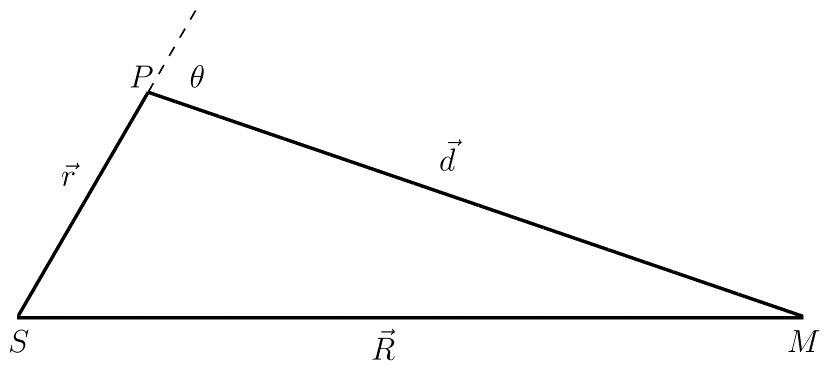

Figure 3: Definisjonsskisse av vektorer som inngår i utrykket for tidevannskraften i et punkt P på jordoverflaten. S og M betegner henholdsvis sentrum i jorden og månen. Vinkelen θ er senitdistansen for månen i punktet P.

Tidevannsakselerasjonen $\vec{a}_t$ får vi ved å dividere kraften $\vec{F}_t$ med massen m. Det kan vises (Gjevik 2011b) at i første tilnærmelse er

$$\vec{a}_t = g\frac{m_j}{m_m}\left(\frac{r}{R}\right)^3\left[3\frac{\vec{R}}{R}\cos\theta - \frac{\vec{r}}{r}\right]$$

hvor vinkelen θ er månens senitdistanse i punktet P, $\vec{r}$ betegner en vektor fra jordens sentrum til punktet P og lengde $r = |\vec{r}|$. I uttrykket ovenfor er små høyere ordens ledd av parameteren r/R sløyfet ved rekkeutvikling. Uttrykket ovenfor viser at tidevannsakselerasjonen er svært liten sammenliknet med tyngdeakselerasjonen g. Setter vi inn tallverdier for parameterene i uttrykket finner vi at forholdet $|\vec{a}_t|/g$ er av orden 10^{-7}.

Tidevannsakselerasjonen kan deles i to komponenter, henholdsvis normalt og langs jordoverflaten (vertikal og horisontalt). Det er horisontalkomponenten som i første rekke bidrar til å akselerere vannmassene i havet. Vertikalkomponenten virker som en liten periodisk endring i tyngdekraften.

En viktig egenskap ved tidevannet på jorden kan trekkes ut av tidevannsakselerasjonens variasjon på jordoverflaten slik som skissert i fig 4. På grunn av jordens rotasjon og månens egenbevegelse (se avsnitt 4) vil kraftfeltet gjenta seg med en periode $T_s/2 = 12{,}46$ timer når månen står i jordens ekvatorplan. Dette forklarer vekslingene mellom høyvann og lavvann med en periode på ca. 12 timer som vi ser mange steder blant annet i Norskehavet og Nord-Atlanteren.
Newton var den første som kom fram til dette ved å bruke gravitasjonsteorien som han hadde utviklet.

5. Likevektstidevannet

La oss forestille oss at hele jorden var dekket av et hav med samme dybde overalt uten kontinenter eller øyer. Dersom vi tenker oss at dette havet kan innstille seg momentant til enhver tid etter tidevannskraften vil overflaten bule litt opp rett under månen og tilsvarende litt opp på baksiden av jorden. Det kan vises den vertikale forskyvningen av havoverflaten i forhold til utgangsstillingen

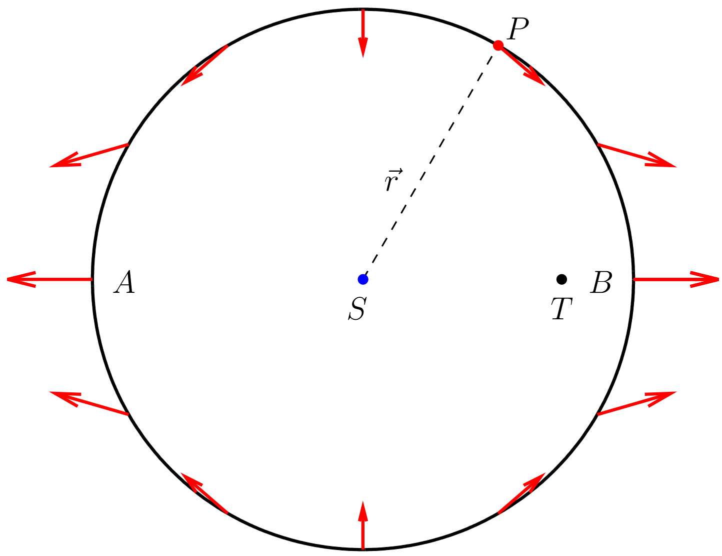

Figure 4: Tidevannskraftens variasjon langs jordoverflaten. Figuren viser situasjonen nå månen står rett ut enten for B eller A. S er sentrum av jorden og T er tyngdepunktet for jord-måne når månen står rett ut for B.

(middel vann) er gitt ved uttrykket:

$$\eta = \frac{1}{4}\frac{m_m}{m_j}r(\frac{r}{R})^3(3\cos 2\theta + 1)$$

Detaljer i utledningen finnes f.eks. Gjevik (2011b). Denne idealiserte havflaten har fått navnet *likevektstidevannet* og formen er skissert i fig. 5. Likevannstidevannet spiller en viktig rolle i modellsimuleringer av tidevannet i et virkelig verdenshav med variabel dyp og øyer og kontinenter. I de modellikningene som brukes ved slike beregninger, tjener likevektstidevannet som en potensialfunksjon for å finne den horisontale komponenten av tidevannskraften.

6. Hvordan skal en popularisere dette?

Å forklare hvordan tidevannskraften virker i en populærvitenskapelig framstilling uten å bruk endel matematiske formler slik som ovenfor er ikke enkelt.

Jeg mener det er vesentlige å få fram at tidevannskraften er resultanten (summmen) av treghetskraften (sentrifugalkraften), som er lik over hele jorden, og den direkte tiltrekningskraften fra månen som avhenger av hvor en befinner seg. Det gjør at tidevannskraften trekker både mot et punkt rett under månen og motpunktet på andre siden av jorden. En kan skjønne dette fordi havmassene på den siden av jorden som venter mot månen, og derfor er nærmere månen enn tyngdepunktet av jorden, vil trekkes sterkere mot månen enn selve jorden. På motsatt side av jorden trekkes selve jorden sterkere mot månen enn havmassene som så og si blir hengende igjen.

Det er også viktig å få fram at tidevannskraftfeltet vil gjenta seg med en periode på ca. 12 timer og at en derfor vil være en halvdaglig periode i vekslingene mellom høy og lavvann. Går en grundigere tilverks er det også viktig å få fram at når månens høyde på himmelen (deklinasjon) varierer, vil dette lede til heldaglige perioder (24 timer) i tidevannskraften.

Responsen på tidevannskraften i det virkelige havet fører til en langt mer komplisert fordeling av høy og lavvann enn hva likevektstidevannet viser. Grunnen til dette er at det vil ta tid for havet å

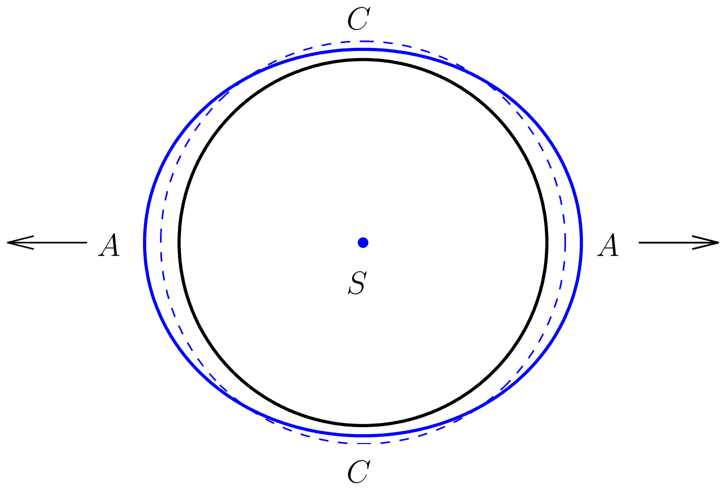

Figure 5: Likevektstidevannet (blå, heltrukket linje) gir høyvann rett under månen og på motsatte side av jorden (A–A). Mellom dette går det et bånd rundt jorden med lavvann (C–C). Middelvannstand er angitt ved blå stiplet linje og retninger til månen med piler. På tegningen er utslagene i likevektstidevannet overdrevet kraftig i forhold til radius av jorden. I virkeligheten står største høyvann bare ca. 0.36 meter over middelvann.

innstille seg etter tidevannskraften, som hele tiden varierer i styrke og retning når månen beveger seg. Tidevannsbølgen fart påvirkes dessuten av bunntopografi og fordelingen av hav og kontinenter. Derfor blir det svært misvisende å bruke likevektstidevannet som bilde på tidevannet i verdenshavet slik som en kan se i mange elementære lærebøker for skoleelever og i populærvitenskapelige framstillinger på internett.

At havene har egensvingninger med perioder nær de hel og halvdaglige tidevannsperiodene gjør at det kan oppstå resonans noen steder og tidevannsforskjellen blir mye større enn høyden av likevektstidevannet. I havområder med nær heldaglige egensvingninger vil det bli bare ett høyvann i døgnet (Thailand, Vietnam og Sør-Kina) og i havområder med nær halvdaglige egensvingninger (Vest-Europa, Norge) vil en få to høyvann i døgnet. At egensvingningene påvirkes både av jordrotasjonen, bunntopografien og tetthetsjiktningen i havet, den siste endrer seg med årstid og klimatiske forhold, gjør at særlig tidevannsstrømmen kan bli svært kompleks. Derfor er det fortsatt mange uavklarte forhold med hensyn til tidevannskraftens *respons* her på jorden, selv om selve kraften er kjent og kan beregnes svært nøyaktig.

Etter å ha vurdert motargumenter og gått nøye igjennom teorien, slik som forklart ovenfor, kan jeg ikke se at de enkle populærvitenskapelige forklaringer på tidevannskraften og havets respons i Gjevik (2009, 2011a) hverken er direkte feilaktige eller misvisende.

At det ved eventuelle senere utgaver av Gjevik (2009) kan være rom for å forbedre formuleringene og utdype forklaringene på noen punkter for å få budskapet enda klarere fram er en annen sak.

Kilder:

Darwin, Georg Howard (1962) The Tides and kindred phenomena in the solar system. Chpt. V. Utgave W. H. Freeman Company. San Fransisco. Publisert første gang 1898.

Frauenfelder, P. und Dr. P. Huber (1951) Einführung in die Physik, I. Band. Ernst Reinhardt Verlag München/Basel. side 181-183.

Gjevik, Bjørn (2009) Flo og fjære langs kysten av Norge og Svalbard. Farleia Forlag. ISBN 978-82-998031-0-6. http://www.farleia-forlag.no

Gjevik, Bjørn (2011a) Flo og fjære langs kysten av Norge. Almanakk for Norge 2011, side 48–51. Utgitt av Universitetet i Oslo. Gyldendal Norsk Forlag.

Gjevik, Bjørn (2011b) Lecture on tides. UNIS, Longyearbyen 23. - 27. Sept. 2013.