Løsningforslag til oppgavesett V, "Feltteori og vektoranalyse" (2018/2021), side 211.

av Bjørn Gjevik, 2. mai 2021

Oppgave 1.

I et plant polarkoordinatsystem (r, θ) er et vektorfelt gitt ved :

$$\boldsymbol{v} = v_r\,\boldsymbol{i}_r + v_\theta\,\boldsymbol{i}_\theta$$

a) For et virvelfritt felt er $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$. Nå er $\nabla \times (\nabla\phi) \equiv 0$ hvor $\phi(r, \theta)$ er en vilkårlig derivebar funksjon. Ved å sette vektoren $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ vil feltet være virvelfritt. Funksjonen $\phi(r, \theta)$ kalles *potensialfunksjonen* for feltet. I plane polarkoordinater er gradienten til potensialfunksjonen

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta$$

slik at komponentene av vektoren er

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}$$

b) For et divergensfritt felt er

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta) = 0$$

Velger nå

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} \\ v_\theta &= \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned}$$

hvor $\psi(r, \theta)$ er en deriverbar funksjon. Da er betingelsen om at vektoren $\boldsymbol{v}$ skal være divergensfri oppfylt.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial\psi}{\partial r}) = 0$$

fordi derivasjonsrekkefølgen kan byttes om. Funksjonen ψ kalles *feltfunksjonen* eller *strømfunksjonen* dersom $\boldsymbol{v}$ representerer et strømfelt.

c) Ekviskalarlinjer for potensialfunksjonen og feltfunksjonen er gitt h.h.v. ved $\phi = \textit{konstant}$ og $\psi = \textit{konstant}$. Gradientvektiorene $\nabla\phi$ og $\nabla\psi$ står normalt på de respektive ekviskalarlinjne.

Nå er

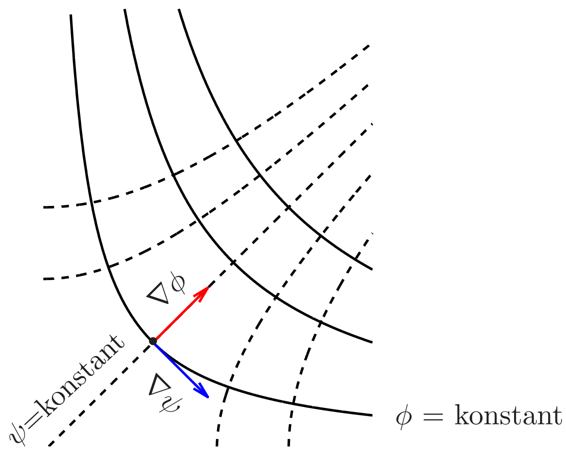
$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = (\frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta) \cdot (\frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial\psi}{r\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = v_r v_\theta + v_\theta(-v_r) = 0$$

Det viser at gradientvektorene til ekviskalarlinjene står normalt på hverandre. Altså skjærer ekviskalarlinjene hverandre med en rett vinkel (se fig. 1).

Oppgave 2.

Gitt to vektorfelt fra potensialteori med strømfunksjoner (feltfunksjoner):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= Uy \\ \psi_2 &= aU\ln{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$



Figur 1: *Skisse av ekviskalarlinjene for potensialfunksjonen (ϕ, heltrukket) og feltfunksjonen (ψ, stiplet). Gradientvektor ($\nabla\phi$, rød) og gradientvektor ($\nabla\psi$, blå).*

a) Strømlinjene for det første feltet er

$$\psi_1(y) = Uy = \psi_o$$

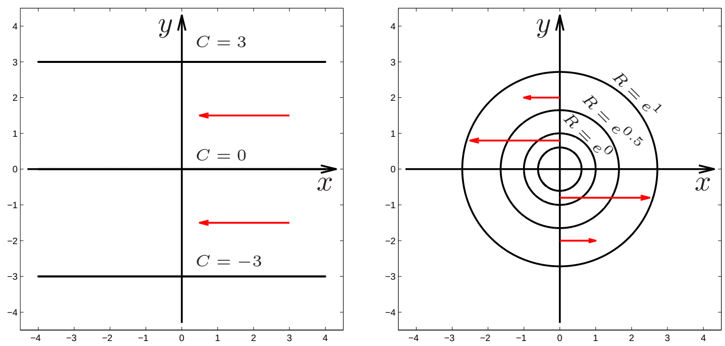
i.e.

$$y = \frac{\psi_o}{U} = C$$

Det er rette linjer parallelt med x-aksen. Komponentene av strømvektoren er:

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial}{\partial y}(\psi_1(y)) \\ v_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\psi_1(y)) = 0 \end{aligned}$$

Strømlinjer og strømvektor er vist til venstre i fig. 2. Feltet er et *uniformt rettlinjet felt.*



Figur 2: *Ekviskalarlinjer for feltet ψ_1 til venstre og for feltet ψ_2 til høyre. Strømvektorer (rød) angir strømstyrke og strømretning.*

Strømlinjene for det andre feltet er

$$\psi_2(x, y) = aU \ln{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \psi_o$$

Setter $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ og får

$$\ln r = \frac{\psi_o}{aU}$$

som gir ved å bruke begge sider av likningen som eksponent for eksponensialfunksjonen:

$$r = \exp\left(\frac{\psi_o}{aU}\right) = R$$

Strømlinjene er altså sirkler med sentrum i origo og radius R for forskjellig valg av ψ_o. Innfører polarkoordinater (r, θ) og skriver

$$\psi_2(r, \theta) = aU \ln r$$

Nå er komponentene av strømvektoren

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{\partial \psi_2}{r \partial \theta} = 0 \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{aU}{r} \end{aligned}$$

Feltet framstiller en *punktvirvel* med sentrum i origo og virvelfri bevegelse utenfor origo. Origo er et singulært punkt i feltet med uendelig stor strømhastighet og strømvektoren peker i alle mulige retninger i dette punktet (uendelig stor virvling). Strømlinjer og strømretning utenfor origo er vist til høyre i fig. 2.

b) To eller flere potensialfelt kan adderes og det gir et nytt divergens- og virvelfritt potensialfelt. La $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$ være divergensfrie og virvelfrie felt i.e.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{v}_1 &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{v}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Da er summen av de to feltene $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ også divergensfritt og virvelfritt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0 + 0 = 0$$

og

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}_1 + \nabla \times \boldsymbol{v}_2 = 0 + 0 = 0$$

På tilsvarende måte kan strømfunksjonene for de to feltene h.h.v. ψ_1 og ψ_2 adderes å gi strømfunksjonen for ψ for felt $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$. Det følger av

$$\boldsymbol{v} = -\nabla \times (\psi \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = -\nabla(\psi_1 \boldsymbol{k}) - \nabla(\psi_2 \boldsymbol{k})$$

hvor $\boldsymbol{k}$ er en enhetsvektor normalt kordinatplanet (x, y). Det er viktig å være klar over at grunnen til at feltene kan adderes (superponeres) på denne måten er at operatorene $\nabla \cdot$ og $\nabla \times$ er *lineære operatorer* dvs. det inngår ikke ledd med produkter av de variable i operatorene.

c) Vi innfører plane koordinater (r, θ) hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Ved å addere sammen feltene for uniform rettlinjet strøm og punktvirvelfeltet får en:

$$\psi(r, \theta) = Ur \sin \theta + aU \ln r - aU \ln r_o$$

hvor det i tillegg er addert til et konstant ledd $aU \ln r_o$ uten at det endrer strømhastigheten i feltet. Strømfunksjonen kan nå skrives:

$$\psi(r, \theta) = Ur \sin \theta + aU \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)$$

Konstanten r_o med dimensjon lengde sikrer at det blir et dimensjonsløst tall som argument i logaritmefunksjonen.

Strømkomponentene i polarkoordinater er:

$$
\begin{aligned}
v_r &= -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = -U\cos\theta \\
v_\theta &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} = U\left[\sin\theta + \frac{a}{r}\right]
\end{aligned}
$$

og i kartesiske koordinater:

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta = -U\left[1 + \frac{a}{r^2}y\right] \\
v_y &= v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta = U\left[\frac{a}{r^2}x\right]
\end{aligned}
$$

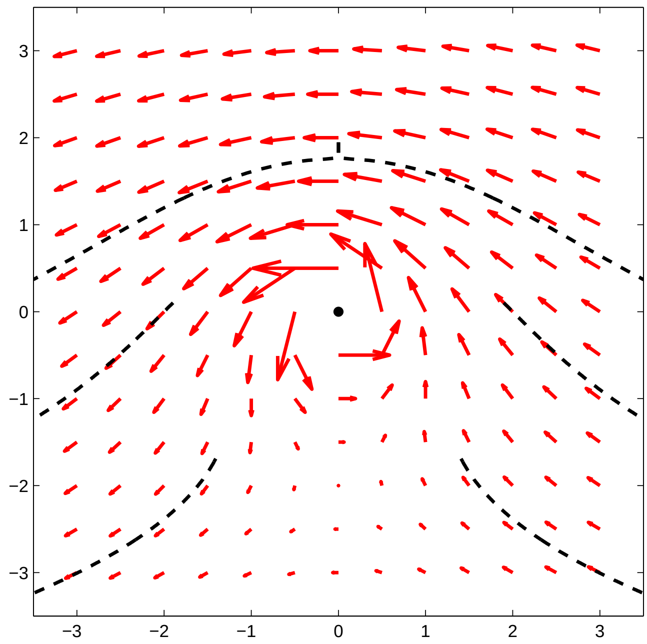
Strømlinjene er gitt ved:

$$\psi(r,\theta) = Ur\sin\theta + aU\ln\left(\frac{r}{r_o}\right) = \psi_o$$

Det kan skrives

$$\sin\theta = \left[C - \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right]\frac{a}{r}$$

hvor konstanten r_o er satt lik a og konstanten $C = \frac{\psi_o}{Ua}$. Strømlinjer og strømvektorer for feltet er skissert i fig. 3.



Figur 3: *Strømvektorer for feltet ψ med $U = 5$, $a = 2.0$ og $r_o = a$. Deler av strømlinjer for $C = -0,75, 0, 0, 0,75$ er markert med stiplete linjer.*

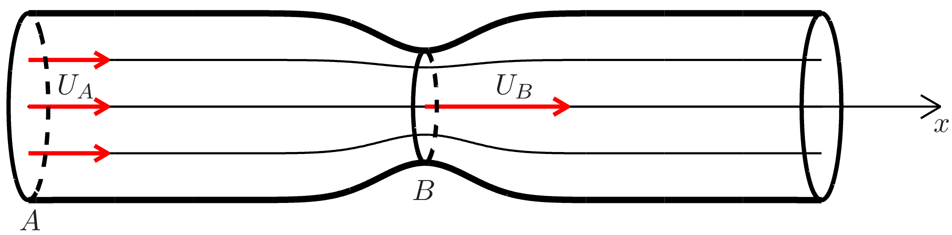
De tre feltene; rettlinjet uniform strøm, punktvirvel og superposisjonen av disse to er ovenfor tolkes som plane strømformer i en friksjonsfri væske med konstant tetthet. En relevant anvendelse er bl.a. modeller for dynamikken av virvler med stor horisontal utstrekning i atmosfæren og havet og hvordan slike virvler påvirkes av bakgrunnsstrømmen.

En elektro-magnetisk analogi: Det er viktig å være klar over av de samme feltene også kan brukes i elektro-magnetisk teori. Det første feltet tilsvarer et uniformt magnetfelt mellom to store og kraftige magnetpoler, eller magnetfeltet i sentrum av et system av store sirkulære spoler som leder elektrisk strøm (Helmholtz coils). Det andre (punktvirvelfeltet) tilsvarer magnetfeltet omkring en rett leder hvor det går en elektrisk strøm (se fig. 9.10 i boken). Superposisjonen av disse to viser hvordan et uniformt magnetfelt virker inn på feltet rundt en leder som har retning normalt det uniform magnetfeltet.

Oppgave 3.
Gitt Bernoullis likning:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + gz = B_o$$

Den skal brukes til å beregne strømmen gjennom et rett horisontalt rør med innsnevring.



Figur 4: *Strøm gjennom rør med innsnevring*

a) Størrelsene som inngår i likningen med enheter er:

Størrelse	Symbol	SI-enhet
Trykk	p	$N/m^2 = Pa$ (Pascal)
Tetthet	ρ	kg/m^3
Strømhastighet	$\boldsymbol{v}$	m/s
Tyngdeakselerasjon	g	m/s^2
Høyde over et referansenivå	z	m
Bernoulli-konstanten	B_o	m^2/s^2

Alle ledd i likningen har samme dimensjon med enhet (m^2/s^2) så likningen er dimensjonsmessig korrekt. Bernoullis likning i denne formen kan brukes langs en strømlinje for stasjonær (tidsuavhengig) strøm av en inkomprssibel væske (ρ konstant).

b) Definerer et flateelement $d\sigma = 2\pi\, r\, dr$ som en sirkulær ring med radius r og bredde dr i rørtverrsnittet. Flatenormalen for flateelementet er $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$. Volumstrømmen gjennom tverrsnittsflaten beregnes slik:

$$Q = \int_0^R \boldsymbol{v}(r) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_0^R U_A \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}\, 2\pi r\, dr = 2\pi U_A \int_0^R r\, dr = \pi R^2 U_A$$

c) Det må være samme volumstrøm gjennom tverrsnittet ved A og B. Det gir:

$$\pi R^2 U_A = \pi r^2 U_B$$

som gir strømhastigheten i den smaleste delen av røret:

$$U_B = (\frac{R}{r})^2\, U_A$$

Det viser at $U_B > U_A$.

d) Bruker Bernoullis likning langs senterlinjen fra A til B for å finne trykket ved B

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}U_A^2 = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}U_B^2$$

Siden det ikke er noen høydeforskjell langs senterlinjen faller tyngdeleddet ut. Fra denne likningen får en

$$p_B = p_A - \frac{\rho}{2}\left[U_B^2 - U_A^2\right]$$

Det viser at trykket avtar fra A til B og det er trykkfallet langs røret som akselerer væsken ($U_B > U_A$).