

Strikkhopp med differensiallikninger

av

Bjørn Gjevik, professor emeritus

Universitetet i Oslo

epost: bjorng@math.uio.no

Dato 8. september 2021

1. Innledning

I mange tilfelle kan en komme langt med å analysere dynamiske systemer ved å resonnerer med energibetraktninger og Newton's 2. lov ($F = ma$) uten å ty til omfattende beregninger. En velkolert og erfaren fysikklærer ved Nadderud videregående skole i Bærum formidlet dette på en glimrende måte gjennom mange slående eksempler til sin avgangsklasse i 2021. Han klarte derved å vekke corona-slitne elevers interesse for slike enkle, forståelige og lærerike resonnement.

Det er en viktig ballast for en fysiker å kunne resonnerer seg fram ved å bruke de grunnleggende prinsipper og egen intuisjon. Men i lengden kommer en ikke forbi å bruke beregningsmodeller.

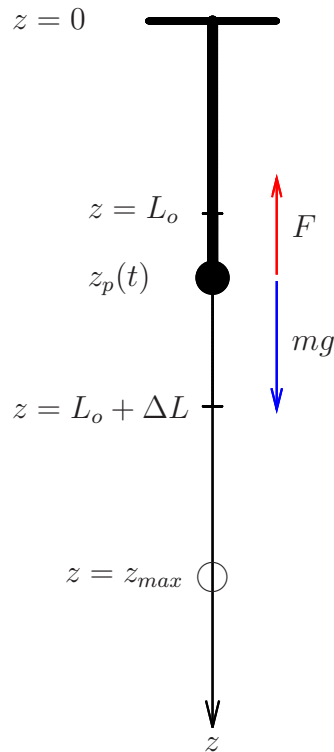
Her skal vi gjennomføre modellberegninger for strikkhopp. Ideen til dette notatet kom etter at en av elevene (min dattersønn) fortalte hvordan de forbildelig hadde behandlet dette temaet i klassen på Nadderud.

2. Enkel matematisk modell

Strikkhopperen har masse m og for enkelt skyld antas den å ha kuleform ("punktformet masse"). Når strikken (tauet) er ubelastet kan den henge fritt utstrakt vertikalt langs en rett linje (z -aksen) med øvre enden festet i origo ($z = 0$) og lengden av strikken er L_0 . Strikken begynner å strammes av hopperen ved $t = 0$ som da har en fart V nedover.

Posisjonen av hopperen for $t > 0$ er $z_p(t)$ (fig. 1) og vi skal sette opp en likning slik at posisjon, fart og akselerasjon for hopperen kan beregnes til et hvert etterfølgende tidspunkt. I første fase av hoppet strekkes strikken, snorkraften øker, farten av hopperen bremses ned til null og hopperen når den laveste punktet ($z_p = z_{max}$). Deretter dras hopperen tilbake (oppover) på grunn av at snorkraften er sterkere enn tyngdekraften. Etter en viss tid t_1 når hopperen tilbake til utgangspunktet $z_p = L_o$ med en oppoverrettet fart. Deretter er strikken slak og strekkraften i strikken er null inntil strikkes strames når hopperen faller nedover igjen.

I praksis vil det vanligvis oppstå en viss horisontal “sleng” av hopperen, men vi skal her for enkelhet skyld regne med at bevegelsen foregår langs en vertikal linje (z -aksen).



Figur 1: Strikk med belastningen på hopperen; F er strekkraften i strikken (tauet) og mg er tyngden

Newtons andre lov for strikkehopperen gir

$$m \frac{d^2 z_p}{dt^2} = mg - F \quad (1)$$

Strekkraften i strikkes er gitt ved Hooke's lov for tøyninger av elastiske materialer, se Gjevik (2020):

$$F = qE \frac{z_p - L_o}{L_o} \quad (2)$$

hvor E er Youngs modul for materialet i strikken (tauet), q er tverrsnittsarealet og

$$\frac{z_p - L_o}{L_o} = \eta$$

er den relative forlengelsen . Setter en inn for F kan likningen (1) omformes og skrives:

$$\frac{d^2 z_p}{dt^2} = -\frac{qE}{mL_o} [z_p - (L_o + \Delta L)] \quad (3)$$

hvor

$$\Delta L = \frac{mgL_o}{qE}$$

er forlengelsen av strikken hvis hopperen henger i ro, i likevekt, i en strukket strikk. Initsialbetingelsene ved $t = 0$ for hoppet settes:

$$z_p = L_o$$

og

$$\frac{dz_p}{dt} = V$$

hvor V er farten hopperen har når han begynner å strekke strikken. Ved å sette

$$\frac{qE}{mL_o} = \omega^2 \quad , \quad z_p = \hat{z}_p + L_o + \Delta L$$

kan differensiallikningen (3) skrives

$$\frac{d^2 \hat{z}_p}{dt^2} = -\omega^2 \hat{z}_p \quad (4)$$

Den har løsning

$$\hat{z}_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

hvor integrasjonskonstantene A og B bestemmes ved initsialbetingelsene. Den nye variable som er innført $\hat{z}_p = z_p - (L_o + \Delta L)$ er forskyvning ut fra likevektstillingen $z_p = L_o + \Delta L$. Det gir løsningen av likningen (3):

$$z_p(t) = L_o + \Delta L \left[1 - \cos \omega t + \frac{V}{\omega \Delta L} \sin \omega t \right] \quad (5)$$

hvor

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

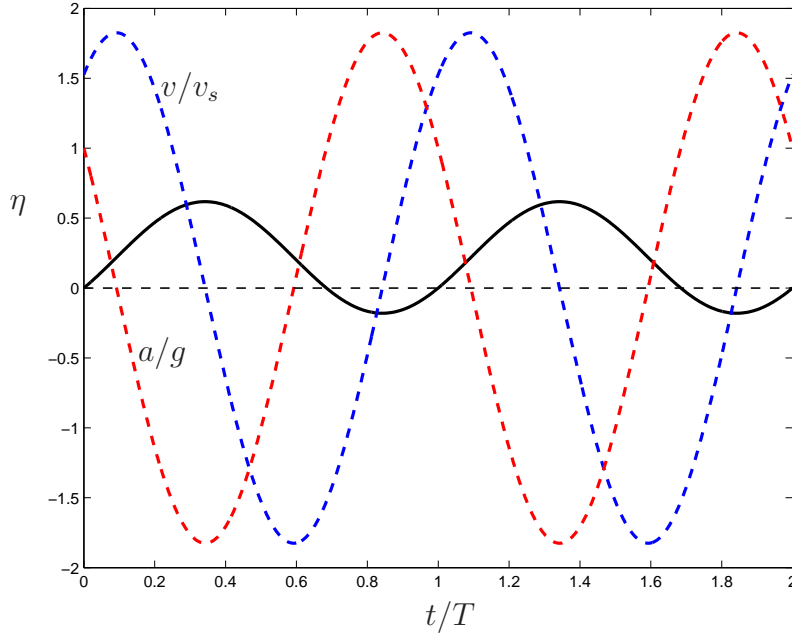
er perioden for frie svingninger av massen (m) når den henger fritt i strikken.

Den relative forlengelsen tilsvarende løsningen (5) kan skrives:

$$\eta = \frac{z_p(t) - L_o}{L_o} = \alpha [1 - \cos \omega t + \beta \sin \omega t]$$

To dimensjonløse parameterene bestemmer dynamikken for systemet

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_o}$$



Figur 2: Relativ forlengelse av strikken (η , svart heltrukket). Dimensjonsløs (skalert) hastighet v/v_s , og akselerasjon a/a_s , for hopperen, dvs for massen m , er henholdsvis tegnet med blå stiplet og rød stiplet.

og

$$\beta = \frac{V}{\omega \Delta L}$$

Hastigheten for massen (hopperen) er:

$$v = \frac{dz_p}{dt} = \Delta L \omega [\sin \omega t + \beta \cos \omega t]$$

og akselerasjonen

$$a = \frac{d^2 z_p}{dt^2} = \Delta L \omega^2 [\cos \omega t - \beta \sin \omega t]$$

Her er det naturlig å skalere hastigheten med størrelsen

$$v_s = \Delta L \omega$$

og akselerasjonen med

$$a_s = \Delta L \omega^2 = g$$

I figur 1 er den relative forlengelsen η og den dimensjonsløse hastighet v/v_s og akselerasjonen a/a_s plottet som funksjon av tiden t/T . Parametrene som er valgt for å beskrive systemet og skaleringsfaktorene er listet i tabellen.

Den største og minste forskyvningen (η_{max} , η_{min}) inntreffer når hastigheten er null i.e. $v = 0$. Det skjer når

$$\tan \omega t = -\beta$$

Tabell 1: Tallverdier for parametre og skaleringsfaktorer

m	E	g	q	L_o	V	α	β	ΔL	T	ω	v_s	a_s
kg	Pa	m/s^2	m^2	m	m/s			m	s	s^{-1}	m/s	m/s^2
70	10^7	9,81	$\pi \cdot 10^{-4}$	20	10	0,2186	1,527	4,37	4,19	1,50	6,55	9,81

Maksimum og minimumsverdien er henholdsvis:

$$\eta_{max} = \alpha(1 + \sqrt{1 + \beta^2})$$

$$\eta_{min} = \alpha(1 - \sqrt{1 + \beta^2})$$

Med $\beta = 1,527$ inntreffer første maksimum, $\eta_{max} = 0,6176$, når

$$\omega t = 123,22^\circ = 2,151 \text{ rad}$$

Det gir $t/T = 0,3423$

Tilsvarende kommer første minimumsverdi $\eta_{min} = -0,1804$, når

$$\omega t = 303,22^\circ = 5,2922 \text{ rad}$$

som gir $t/T = 0,8423$. Disse verdiene samsvarer med det en kan lese av figur 2. Men modellen er urealistisk etter at hopperen passerer utgangspunktet ($z = 0$) på vei oppover fordi formelen (2) gir en strekkraft rettet nedover, mens i virkeligheten er strekkraften nå null inntil tauet strammes igjen.

3. Energibetrakninger

Den lengste tøyningen av strikken kan finnes enkelt ved å bruke energibetrakninger. Når strikken tøyes utføres det et arbeid

$$W = \int_{L_o}^{z_p} F dz_p = -\frac{qE}{L_o} \int_{L_o}^{z_p} (z_p - L_o) dz_p$$

Integralet kan lett beregnes og det gir:

$$W = -\frac{qE}{2L_o}(z_p - L_o)^2$$

Minustegnet foran uttrykket betyr at kraften på massen og forskyvningen er rettet motsatt. Arbeidet som utføres finnes igjen som elastisk energi lagret i strikken. Når massen er i laveste posisjon $z_p = z_{max}$ med fart $v = 0$ må den elastiske energien i strikken være lik tapet av potensiell og kinetisk energi fra startposisjonen. Dette kan uttrykkes:

$$\frac{qE}{2L_o}(z_{max} - L_o)^2 = mg(z_{max} - L_o) + \frac{1}{2}mV^2$$

Innfører den relative forlengelsen

$$\eta_{max} = \frac{z_{max} - L_o}{L_o}$$

og ved innsetning i energilikningen ovenfor får en etter litt enkel omordning

$$\eta_{max}^2 - \frac{2mg}{qE}\eta_{max} - \frac{mV^2}{qEL_o} = 0$$

Den ene løsningen av andregradslikningen er:

$$\eta_{max} = \alpha \left[1 + \sqrt{1 + \beta^2} \right]$$

hvor α og β er definert tidligere. Resultatet for η_{max} samsvarer med hva vi fant fra analysen av løsningen av differensiallikningen (bevegelseslikningen) for systemet. Den andre løsningen av andregradslikningen (med minus foran rottegnet) gir høyden som hopperen når opp til når strikken strammes igjen etter første fase med fall, i.e. η_{min} , men da er som tidligere nevnt modellen urealistisk.

4. Diskusjon

Fra resultatene i fig. 2 ser en at ved $t = 0$ er strikken strukket i lengde L_o og hopperen (massen, m) har en skalert hastighet $v/v_s \approx 1,52$, tilsvarende 10 m/s rettet nedover. Skalert akselerasjon er $a/g = 1$.

Deretter øker den relative forlengelsen av strikken til $\eta \approx 0,62$, tilsvarende en forlengelse av strikk på ca. 14 m . Det inntreffer etter $t \approx 0,34T$, tilsvarende ca. $1,5 \text{ s}$ etter start. Ved dette tidspunktet er hastigheten av hopperen lik null og vedkommende er utsatt for en akselerasjon tilsvarende ca. $1,8g$ rettet oppover. Strikken trekker seg deretter sammen og ved $t = t_1 \approx 0,7T$, tilsvarende ca. $3,0 \text{ s}$ etter start, er hopperen tilbake til utgangspunktet ($z = 0$) med en oppoverrettet (negativ) hastighet $v \approx -1,5v_s$. Hopperen har nå tilnærmet en akselerasjon g rettet oppover. Deretter gjentar løsningen seg periodisk, men modellen er urealistisk for $t > t_1$, se kommentar på slutten av avsnitt 2.

5. Etterskrift

På 1980-tallet foreleste jeg kurset i kontinuumsmekanikk med et tidlig utkast til boken (Gjevik 2020). Jeg regnet da et eksempel hvordan en strikkhopper ville bevege seg, omtrent slik som framstilt ovenfor. En av studentene var en kjent aktiv norsk basehopper med mange dristige hopp både her hjemme og i utlandet. Han var en meget god student og fulgte kurset med stor interesse. Da eksemplet med strikkhopper ble gjennomgått på tavla «tok han helt av» med spørsmål og kommentarer.

Etter timen kom han bort til meg: «Du Gjevik, jeg kjenner karer som kan sette opp en høy kran her på plassen utenfor Matematikkbygningen. Til krana kan det festes en passe elastisk line og jeg kan hoppe. Du sitter nedfor og viser beregningene på datamaskinen at jeg vil stoppe 50 cm over brusteinsdekke på plassen. Tenk på hvilken oppsikt dette vil vekke - med god reklame for kurset ditt !»

Jeg var langt mindre risikovillig enn han og avslø tilbudet umiddelbart av sikkerhetsgrunner, men måtte berømme hans entusiasme, mot og tiltro til beregninger !

Litteratur

B. Gjevik (2020) Innføring i kontinuumsmekanikk - elastiske stoff og viskøse væsker
Farleia Forlag, Jar, ISBN 978-82-998031-3-7